**第37讲 对策问题**

**一、知识要点**

同学们都熟悉“田忌与齐王赛马”的故事，这个故事给我们的启示是：田忌采用了“扬长避短”的策略，取得了胜利。

生活中的许多事物都蕴含着数学道理，人们在竞赛和争斗中总是玩游戏，大至体育比赛、军事较量等，人们在竞赛和争斗中总是希望自己或自己的一方获取胜利，这就要求参与竞争的双方都要制定出自己的策略，这就是所谓“知己知彼，百战不殆”。哪一方的策略更胜一筹，哪一方就会取得最终的胜利。

解决这类问题一般采用逆推法和归纳法。

**二、精讲精练**

**【例题1】**两个人做一个移火柴的游戏，比赛的规则是：两人从一堆火柴中可轮流移走1至7根火柴，直到移尽为止。挨到谁移走最后一根火柴就算谁输。如果开始时有1000根火柴，首先移火柴的人在第一次移走多少根时才能在游戏中保证获胜。

先移火柴的人要取胜，只要取走第999根火柴，即利用逆推法就可得到答案。

设先移的人为甲，后移的人为乙。甲要取胜只要取走第999根火柴。因此，只要取到第991根就可以了（如乙取1根甲就取7根；如乙取2根甲就取6根。依次类推，甲取的与乙取的之和为8根火柴）。由此继续推下去，甲只要取第983根，第975根，……第7根就能保证获胜。

所以，先移火柴的人要保证获胜，第一次应移走7根火柴。

**练习1：**

1、一堆火柴40根，甲、乙两人轮流去拿，谁拿到最后一根谁胜。每人每次可以拿1至3根，不许不拿，乙让甲先拿。问：谁能一定取胜？他要取胜应采取什么策略？

2、两人轮流报数，规定每次报的数都是不超过8的自然数，把两人报的数累加起来，谁先报到88，谁就获胜。问：先报数者有必胜的策略吗？

3、把1994个空格排成一排，第一格中放一枚棋子，甲、乙两人轮流移动棋子，每人每次可后移1格、2格、3格，谁先移到最后一格谁胜。先移者确保获胜的方法是什么？

**【例题2】**有1987粒棋子。甲、乙两人分别轮流取棋子，每次最少取1粒，最多取4粒，不能不取，取到最后一粒的为胜者。现在两人通过抽签决定谁先取。你认为先取的能胜，还是后取的能胜？怎样取法才能取胜？

从结局开始，倒推上去。不妨设甲先取，乙后取，剩下1至4粒，甲可以一次拿完。如果剩下5粒棋子，则甲不能一次拿完，乙胜。因此甲想取胜，只要在某一时刻留下5粒棋子就行了。不妨设甲先取，则甲能取胜。甲第一次取2粒，以后无论乙拿几粒，甲只要使自己的粒数与乙拿的粒数之和正好等于5，这样，每一轮后，剩下的棋子粒数总是5的倍数，最后总能留下5粒棋子，因此，甲先取必胜。

**练习2：**

1、甲、乙两人轮流从1993粒棋子中取走1粒或2粒或3粒，谁取到最后一粒的是胜利者，你认为先取的能获胜，还是后取的能获胜，应采取什么策略？

2、有1997根火柴，甲、乙两人轮流取火柴，每人每次可取1至10根，谁能取到最后一根谁为胜利者，甲先取，乙后取。甲有获胜的可能吗？取胜的策略是什么？

3、盒子里有47粒珠子，两人轮流取，每次最多取5粒，最少取1粒，谁最先把盒子的珠子取完，谁就胜利，小明和小红来玩这个取珠子的游戏，先名先、小红后，谁胜？取胜的策略是什么？

**【例题3】**在黑板上写有999个数：2，3，4，……，1000。甲、乙两人轮流擦去黑板上的一个数（甲先擦，乙后擦），如果最后剩下的两个数互质，则甲胜，否则乙胜。谁必胜？必胜的策略是什么？

甲先擦去1000，剩下的998个数，分为499个数对：（2，3），（4，5），（6，7），……（998，999）。可见每一对数中的两个数互质。如果乙擦去某一对中的一个，甲则接着擦去这对中的另一个，这样乙、甲轮流去擦，总是一对数、一对数地擦，最后剩下的一对数必互质。所以，甲必胜。

**练习3：**

**1、**甲、乙两人轮流从分别写有1，2，3，……，99的99张卡片中任意取走一张，先取卡的人能否保证在他取走的第97张卡片时，使剩下的两张卡片上的数一个是奇数，一个是偶数？

2、两个人进行如下游戏，即两个人轮流从数列1，2，3，……，100，101勾去九个数。经过这样的11次删除后，还剩下两个数。如果这两个数的差是55，这时判第一个勾数的人获胜。问第一个勾数的人能否获胜？获胜的策略是什么？

3、在黑板上写n—1（n＞3）个数：2，3，4，……，n。甲、乙两人轮流在黑板上擦去一个数。如果最后剩下的两个数互质，则乙胜，否则甲胜。N分别取什么值时：（1）甲必胜？（2）乙必胜？必胜的策略是什么？

**【例题4】**甲、乙两人轮流在黑板上写下不超过10的自然数，规定禁止在黑板上写已写过的数的约数，最后不能写的人为失败者。如果甲第一个写，谁一定获胜？写出一种获胜的方法。

这里关键是第一次写什么数，总共只有10个数，可通过归纳试验。

甲不能写1，否则乙写6，乙可获胜；甲不能写3，5，7，否则乙写8，乙可获胜；甲不能写4，9，10，否则乙写6，乙可获胜。因此，甲先写6或8，才有可能获胜。

甲可以获胜。如甲写6，去掉6的约数1，2，3，6，乙只能写4，5，7，8，9，10这六个数中的一个，将这六个数分成（4，5），（7，9），（8，10）三组，当乙写某组中的一个数，甲就写另一个数，甲就能获胜。

**练习4：**

1、甲、乙两人轮流在黑板上写上不超过14的自然数。书写规则是：不允许写黑板上已写过的数的约数，轮到书写人无法再写时就是输者。现甲先写，乙后写，谁能获胜？应采取什么对策？

2、甲、乙两人轮流从分别写有3，4，5，……，11的9张卡片中任意取走一张，规定取卡人不能取已取过的数的倍数，轮到谁无法再取时，谁就输。现甲先取，乙后取，甲能否必然获绳？应采取的对策是什么？

3、甲、乙两人轮流在2004粒棋子中取走1粒，3粒，5粒或7粒棋子。甲先取，乙后取，取到最后一粒棋子者为胜者。甲、乙两人谁能获胜？

**【例题5】**有一个3×3的棋盘以及9张大小为一个方格的卡片如图37-1所示，9张卡片分别写有：1，3，4，5，6，7，8，9，10这几个数。小兵和小强两人做游戏，轮流取一张卡片放在9格中的一格，小兵计算上、下两行6个数的和；小强计算左、右两列6个数的和，和数大的一方取胜。小兵一定能取胜吗？

如图37-1所示，由于4个角的数是两人共有的，因而和数的大小只与放在

A，B，C，D这4个格中的数有关。

小兵要获胜，必须采取如下策略，尽可能把大数填入A或C格，尽可能将

小数填入B格或D格。

由于1+10＜3+9，即B+D＜A+C，小兵应先将1放在B格，如小强把10放进D格，

小兵再把9放进A格，这时不论小强怎么做，C格中一定是大于或等于3的数，因而小兵获胜。如小强把3放进A格，小兵只需将9放到C格，小兵也一定获胜。

**练习5：**

**1、**在5×5的棋盘的右上角放一枚棋子，每一步只能向左、想下或向左下对角线走一格。两人交替走，谁为胜者。必胜的策略是什么？

2、甲、乙两人轮流往一个圆桌面上放同样大小的硬币，规则是每人每次只能放一枚，硬币不能重叠，谁放完最后一枚硬币而使对方再无处可放，谁就获胜。如果甲先放，那么他怎样才能取胜？

3、两人轮流在3×3的方格中画“√”和“×”，规定每人每次至少画一格，至多画三格，所有的格画满后，谁画的符号总数为偶数，谁就获胜。谁有获胜的策略？